

Exercice

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

- ▶ la donnée de ses premiers termes u_0 et u_1 ,
- ▶ la relation de récurrence : pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On se propose de calculer l'expression des termes de cette suite par une méthode matricielle.

Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

- 1 a.** Montrer que pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = A \times U_n, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- b.** Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $U_n = A^n \times U_0$.

- 2** On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a.** Déterminer à la calculatrice P^{-1} et $P^{-1} \times A \times P$.

- b.** En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

- 3** En déduire l'expression de u_n en fonction de n , u_0 et u_1 .